

## PRÁCTICAS DE PASO AL LÍMITE EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Marvin Mendoza V., Leonora Díaz M.

Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Universidad de Los Lagos

vinmar28@hotmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl

Honduras

Chile

**Resumen.** Este reporte da cuenta de un estudio exploratorio de prácticas de paso al límite en estudiantes de primer año universitario. Investigaciones muestran que los estudiantes no se apropian significativamente de esta noción. Entre otros, concurren a esta problemática un obstáculo sociocultural a su aprendizaje; una carencia de referencias a fenómenos exteriores a la matemática y que el límite organiza; y, divorcio entre la intuición y el saber, dificultando la construcción matemática del infinito. Con base en el desarrollo de actividades, se explora la puesta en escena de los infinitos potencial y actual, en el cálculo del límite matemático.

**Palabras clave:** estrategias de Enseñanza, límite matemático, infinitos potencial y actual

**Abstract.** This research illustrates an exploratory study of pass to the limit practices of freshman university students. Investigations show that students do not understand this idea properly. Among others, this is a sociocultural barrier problem; lack of references to external mathematical phenomena so that it allows the limit to organize; and also the divorce between intuition and knowledge which makes the mathematical construction of limit a difficult task. Based on the development of activities, it explores the staging of the infinite potential and actual, in calculating the mathematical limit.

**Key words:** teaching strategies, mathematical limit, infinity potential, actual infinity

### Introducción

Es conocido que la enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación terciaria actual, ya que su aprendizaje trae ligado dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior. Se debe abordar el desplazamiento de un pensamiento algebraico a uno analítico, de usar igualdades a usar aproximaciones.

Para Artigue (1995) las dificultades en la enseñanza del cálculo provienen de: a) la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo; b) la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y su tratamiento en la enseñanza; y, c) la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.

### Antecedentes

Diferentes autores han desarrollado investigaciones que giran en torno a la problemática de la enseñanza-aprendizaje del límite matemático. Díaz-Moreno, L. (1999) reporta como obstáculo sociocultural a su aprendizaje, a la estructura de la representación cotidiana de límite. Resultado del cruce de dos ejes categoriales, los ejes de dipolos “evolución”/“involución” y “dentro de las normas”/“fuera de las normas” de connotaciones positivo-negativa respectivamente. Se establece cuatro mundos posibles a los que el estudiantado asocia la noción cotidiana de límite. Una mayoría adscribe al mundo de “lo que no puedo hacer” “cuando

*llegamos a una situación límite (...) ya no puede ser revertida” y por ende se debe “evitar llegar a ella”.* Eluden traspasar un límite que los expone a riesgos vitales, fungiendo esta representación como un obstáculo al aprendizaje, requiriéndose un diálogo del aula con ella.

Por su parte, Molino (2010) alerta que se carece de referencias a fenómenos exteriores a la matemática y que, el límite organice. Si, desde una perspectiva fenomenológica (Freudenthal, 1983), las nociones matemáticas emergen en calidad de organizadoras de los fenómenos, este hecho limita de modo sustantivo diseñar la enseñanza para su apropiación.

Para Leston (2011), existen situaciones a nivel social que requieren de un concepto como el infinito, en tanto que la escuela deja fuera a las intuiciones que estas propician, obstaculizando la construcción del infinito matemático en el aula. Tales situaciones han de indagarse para diseñar una enseñanza que evoque en los estudiantes, primeras aproximaciones con el infinito, para después, llevarlos a la construcción del infinito matemático.

### Justificación

Este reporte de investigación toma en consideración los análisis previos en los rendimientos de Cálculo Diferencial de los estudiantes de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH) durante el año 2010, específicamente en los contenidos pertinentes al límite. Estos resultados, provocaron un descontento en los docentes de Ingeniería, porque más del cincuenta por ciento de los estudiantes reprobó. Esta situación causó un desafío en los docentes, específicamente investigar los procesos de enseñanza y de aprendizajes del cálculo, en particular la problemática que dichos procesos presentan, en lo referente a la construcción del pensamiento matemático superior.

Las investigaciones que mencionamos en el apartado de antecedentes, nos sirvieron como punto de partida para analizar el problema del tema en cuestión. Reflexiones en relación a que una enseñanza tradicional del límite no favorece el desarrollo de significados acerca de la comprensión del contenido y de su aplicabilidad, puesto que, la misma genera poca interactividad profesor/estudiantes y estudiantes/estudiantes, que se instala en ese tipo de enseñanza. La posibilidad de generarse debates en torno a la problemática del límite, se ve reducida, aspecto que poco contribuye para afianzar los significados asociados a este concepto.

La situación mencionada en el párrafo anterior, repercute de modo dramático en las carreras de Ingeniería, en donde es de suma importancia el manejo comprensivo del límite para su posterior aplicación en situaciones problemas, propias a su especificidad. En el caso de la carrera de *Ingeniería Agroindustrial, de la UNAH-TEC Danlí*, no se da una excepción a los resultados insatisfactorios. Los estudiantes no son capaces de reproducir de manera

significativa los conocimientos, supuestamente aprendidos, y en su mayoría no muestran una apropiación significativa del concepto de límite.

### Objetivos del estudio

Esta investigación se propone caracterizar estrategias estudiantiles que entran en escena, cuando se incorpora a los estudiantes a trabajar con situaciones construidas con recursos de geometría sintética, y que involucran procesos infinitos para propiciar el paso al límite. Específicamente dar cuenta de los desempeños que presentan los estudiantes al transitar entre registros particularmente, geométrico, analítico-algebraico y verbal, así como también detectar el acercamiento de los estudiantes hacia los infinitos, tanto el potencial como el actual, que les permita dar el paso al límite en contextos de geometría sintética y haciendo uso del recurso de la visualización.

### Marco teórico

En esta investigación se utilizaron elementos teóricos de la *Teoría de Representaciones Semióticas de Duval*, una mirada particular para la visualización, definición de infinitos en sus facetas potencial y actual y la definición del paso al límite. Para Duval (1999), las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación.

En este contexto trataremos, en lo posible, de enfocarnos en los desplazamientos entre los registros que realizan los estudiantes, al trabajar el paso al límite en contextos de geometría sintética. Lo anterior implica realizar una caracterización de las textualidades de los jóvenes al enfrentarse en actividades que involucran el paso al límite y en los procesos infinitos.

Con respecto a visualización, se entenderá en el sentido de representaciones geométricas o gráficas que requieren de un proceso personal de cada individuo, y que pueda poner de manifiesto la representación de un determinado objeto y operar sobre ese objeto. Esto incluye representar, transformar, documentar y argumentar.

En lo referente al infinito potencial, se comprenderá como aquel que está fundamentado a la reiteración de un proceso que nunca termina. El infinito actual de esta investigación se fundamenta en algunas ideas de Costa y Otto (2005), que tratan al infinito actual como si

fuese un elemento que surge al dar el paso al límite. En este sentido, el infinito da cuenta de la llegada, cuando se abstrae el total de elementos de un proceso indefinido.

En base a los elementos teóricos señalados y los aportes realizados por Díaz (2009), respecto de como interpretan el método de exhaustión los matemáticos modernos, se propone una secuencia de actividades que involucren diversos aspectos subyacentes en el paso al límite, con las cuales se busca que el estudiantado pueda acercarse al concepto en mención, de una manera más significativa, centrando el trabajo en el estudiante y en su desempeño, ante situaciones problemáticas que le permitan afrontar desafíos y quiebres cognitivos. Éstas se orientaron a construir significados para la operación de paso al límite. Su secuencia presenta al estudiantado un itinerario para configurar una red de significados, haciendo concurrir distintos registros y propiciando la puesta en escena de las nociones de infinito potencial e infinito actual, subyacentes al paso al límite.

### Metodología

Este estudio responde a una investigación-acción, con el objeto de reflexionar y mejorar un modo de proceder didáctico. Propone una secuencia de actividades matemáticas que promuevan el aprendizaje significativo del paso al límite entre estudiantes que se inician en el estudio del Cálculo.

El estudio, entonces, reporta un primer ciclo de investigación-acción, según una espiral autorreflexiva, que incluye la planificación de las actividades, su puesta en escena del aula, el registro de las elaboraciones estudiantiles y la reflexión con base en sus producciones. Con las cuales se pretende lograr el perfeccionamiento docente en la acción y la mejora de los aprendizajes estudiantiles, así como una propuesta didáctica validada internamente que se orienta al aprendizaje significativo del paso al límite.

La enseñanza inició con la exploración de conocimientos previos de los estudiantes, punto de partida al diseño de las actividades. Estas se orientaron a construir significados para la operación de paso al límite. Su secuencia presenta al estudiantado un itinerario para configurar una red de significados, haciendo concurrir distintos registros y propiciando la puesta en escena de las nociones de infinito potencial e infinito actual, subyacentes en el paso al límite.

Se aplicó un diagnóstico a 30 estudiantes de Ingeniería agroindustrial del segundo semestre de 2011. A continuación se reforzaron temas concurrentes y previos al límite matemático: nociones de álgebra, trigonometría, funciones, intervalos reales, modelación. Enseguida los estudiantes desarrollaron una secuencia de nueve actividades, culminando su desarrollo 23 de ellos. Se destinaron 120 minutos a cada actividad durante cinco semanas.

## Diseño de la enseñanza

La enseñanza se realizó en dos fases, la primera que consistió en el diseño de prueba diagnóstica. Para ello se realizó una selección de preguntas cuyas respuestas permitiesen establecer el dominio de temas concurrentes y previos al paso al límite matemático y la segunda fase que consistió en el diseño de las actividades. Con base a reactivos de investigación de Sierpinski (1985), tesis de maestría acerca de sucesiones, entre otros) y libros de texto de cálculo, se elaboraron 9 actividades. Las actividades se dividieron en tres subgrupos, los cuales se presentan a continuación en la tabla 1, junto a sus correspondientes propósitos.

Subgrupo	Propósitos
<i>De la actividad uno a la cinco.</i> Se les proporciona reactivos en el registro geométrico, en donde se les solicita diferentes resultados tales como: longitudes, áreas de figuras.	Que los estudiantes pudiesen detectar la puesta en escena de los infinitos tanto potencial y actual involucrados y que logren <i>dar el paso al límite</i> . Conocer las diferentes estrategias de resolución, que utilizan los estudiantes al enfrentarse a sumas infinitas, y como utilizan la visualización, en el proceso de resolución del problema, al transitar entre diferentes registros de representación. En particular el geométrico, algebraico-analítico y el verbal.
<i>Actividad seis y siete.</i> Se les solicita a los estudiantes que establezcan si la situación puede o no dar paso al límite y que expresen su justificación al respecto.	Que los estudiantes puedan reconocer cuando “se <i>da paso al límite y cuando no</i> ”. Conocer las diferentes estrategias de resolución, por parte de los estudiantes y la visualización que emplean, y el uso y tránsito entre los diferentes registros de representación.
<i>Actividad ocho y nueve.</i> Se les proporcionan situaciones que involucran procesos infinitos con el desafío de resolver la relación existente entre ciertas magnitudes tales como distancia, velocidad y tiempo, bajo ciertas condiciones específicas.	Analizar el desempeño de los estudiantes cuando se enfrenten a diferentes situaciones donde estén involucrados las nociones de infinitos. Conocer las estrategias de resolución de la situación problema, y los argumentos de resolución.

Tabla 1: Contrastes entre subgrupo de actividades y propósitos de las mismas.

## Resultados

De manera particular se presentan los resultados de un grupo para la actividad uno. Esta actividad consistió en unir los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado  $L$ , se obtiene otro cuadrado, en el que volvemos a hacer la misma operación, y así se continua indefinidamente. Los objetivos de la actividad incluyen procesos de identificación de infinitos tanto potencial y actual, la suma de las áreas de los infinitos cuadrados construidos y la

identificación de que si la secuencia obtenida en relación a las áreas, les proporcionaba un resultado al sumar las mismas. Concretamente la figura 1, nos ilustra la actividad número uno.

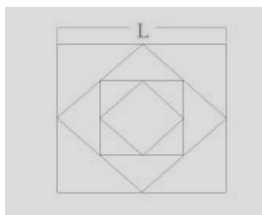


Figura 1: N cuadrados inscritos.

El grupo uno, integrado por cuatro personas, se aboca a la tarea de calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados, pasando por dos momentos, señalados por a) y b).

a) *Efectuar el cálculo del área de los cuatro cuadrados que vienen dibujados en la figura que se les presenta.* Lo realizan mediante tratamiento en el registro algebraico para poder calcular lados y áreas de los respectivos cuadrados, en articulación con la representación geométrica del enunciado. Es decir, desde el punto de vista de la visualización, los estudiantes son capaces de “reflejar información visual”.

Para lo anterior, a excepción del lado del cuadrado mayor que ya tiene asignada una variable (L), asignan una letra para el lado de cada cuadrado inscrito de la figura (C, m y S respectivamente). Además, exponen para cada caso el cálculo de los respectivos lados y áreas de cada uno de estos cuadrados inscritos, en términos de L, como se muestra en la tabla 2.

Cuadrado	Lado	Área
Cuadrado mayor	L	$L^2$
Primer cuadrado inscrito	$C = \frac{\sqrt{2}}{2} L$	$\frac{1}{2} L^2$
Segundo cuadrado inscrito	$m = \frac{1}{2} L$	$\frac{1}{4} L^2$
Tercer cuadrado inscrito	$S = \frac{\sqrt{2}}{4} L$	$\frac{1}{8} L^2$

Tabla 2: Elementos de la actividad

La articulación del registro algebraico (donde efectúan el tratamiento para el cálculo de estos lados y áreas) con la representación geométrica se aprecia cuando calculan - vía Teorema de Pitágoras - los lados (C, m y S respectivamente), que si bien es cierto, corresponden a cada lado del respectivo cuadrado inscrito, al mismo tiempo, corresponden a la hipotenusa de los triángulos que se forman al unir los puntos medios de los cuadrados circunscritos que generan a los inscritos.

b) *Identificar a las áreas resultantes de los cuatro cuadrados como partes de una serie geométrica convergente.* Aquí, el registro geométrico pierde relevancia como referente para la tarea de calcular la suma infinita. Los estudiantes reconocen la razón de la serie ( $r = \frac{1}{2}$ ) y efectúan su cálculo mediante la fórmula usual que se utiliza para ello.

En síntesis, para la construcción de la serie geométrica a la cual le calculan la suma, este grupo utilizó como principal recurso de trabajo, el registro algebraico en articulación con el registro geométrico, actuando en ese proceso como elemento conector, el teorema de Pitágoras (lado del cuadrado inscrito con un doble rol, de lado e hipotenusa).

Por otro lado, este grupo no logra concretar el paso al límite. Reflexionan que se pueden construir muchos cuadrados pero que no se va a llegar a tener un último cuadrado, sosteniendo la imposibilidad de esto, en el hecho de que tal cuadrado no podría tener lado cero. En esta última afirmación está implícita la idea de “*tendencia a un valor*” sin llegar a serlo, lo cual obstaculiza el paso al límite.

### Conclusiones

En particular, el trabajo se propuso trazar un itinerario en los estudiantes, en las tareas de configuración del infinito, como proceso implícito en el paso al límite en contextos de geometría sintética, en particular de la series como herramienta de cálculo de sumas que fueron referidas en la actividades de este reporte. En ese sentido, el reporte presenta algunas conclusiones que los estudiantes presentaron en sus producciones, en relación a los infinitos en sus dos facetas, en relación a los registros utilizados y en relación al paso al límite.

Con respecto al infinito potencial, se distingue entre las estrategias estudiantiles varias formas de dar cuenta de su uso, haciéndose esto visible vía variados registros.

En el registro algebraico y también numérico, mediante “*puntos suspensivos*”. En el registro de lenguaje natural vía afirmaciones del estilo: *el área de cada círculo es (...) el área del anterior*, “*así sucesivamente*”, “*dividir los triángulos indefinidamente*”. En el registro geométrico, dibujando más figuras de las que se proporcionan en la figura que se explicita en la situación problema.

En el registro algebraico y también numérico, explicitando más expresiones algebraicas o cálculos numéricos, para figuras que no aparecen “*dibujadas*” en la original. En algunos casos, incorporan estas expresiones o cálculos sin necesidad de explicitar la figura a la cual debiese corresponder. En ese sentido, asumen que las figuras se siguen generando y que las determinadas expresiones o cálculos corresponden a aquellas. Se ayudan en algunas ocasiones para elucidar lo anterior, con comentarios expresados evidentemente, mediante registro de lenguaje natural.

Con respecto al infinito actual son muy incipientes los indicios encontrados en las producciones estudiantiles, quizás por la doble faceta de ver el infinito desde las dos perspectivas (Tall, 1980; Tall, 1992 y Hitt, 2003).

Con respecto al paso al límite, los estudiantes se quedan con la perspectiva de acercamiento y no dan el paso al mismo, probablemente por los miedos que menciona Díaz-Moreno, (1999) donde se manifiesta un problema sociocultural, de pasar el límite, porque les causa temor o inseguridad.

En las actividades de la investigación se exhibieron diferentes argumentos para la resolución de cada actividad propuesta. En los desplazamientos entre registros algebraico y geométrico evidenciaron su articulación. En las actividades desarrolladas los grupos obtuvieron respuestas análogas, a pesar de la diversidad de estrategias utilizadas.

En suma, los estudiantes siguieron una ruta para el paso al límite, con base en la articulación de los registros geométrico y algebraico, y, la puesta en escena de los infinitos actual y potencial.

### Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. En P. Gómez (Ed.). *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Bogotá: Iberoamérica.
- Costa, E. y Otto, B. (2005). Ideología y Matemáticas: El infinito. *Revista Rect@*, 13 (1), 1-9.
- Díaz-Moreno, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite*. Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica, Santiago, Chile.
- Díaz, M. (1999). *Fundamentos de la matemática: análisis de la primera crisis*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Díaz, M. (2009). El método de exhaustión. *Revista Alternativa*, 6 (19), 1-24.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st PME-NA conference* (pp. 3-26). Cuernavaca: ERIC/CSMEE.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Riedel.
- Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 91 - 111). México DF: Fondo de Cultura Económica.



- Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA- IPN, México.
- Molfino, V. (2010). *Procesos de institucionalización del concepto de límite: análisis socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6 (1), 5-68.
- Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education* (pp. 170-176). Berkeley, CA: PME.
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495–511). New York: Macmillan.